

Théorie des déformations équivariantes des morphismes localement d'intersections complètes

Sylvain Maugeais

1st February 2008

Abstract

This is an expository paper on the subject of the title. It assumes basic scheme theory, commutative and homological algebra.

1 Introduction

Le but de cet article est de donner les propriétés basiques et les théorèmes fondamentaux de la théorie des déformations équivariantes des schémas d'intersections complètes munies d'une action d'un groupe abstrait fini. À proprement parler, il n'y a rien de nouveau dans cet article. Le but essentiel est de donner des preuves simples à des théorèmes déjà connus et de les illustrer par des exemples. Nous n'hésiterons donc pas à ajouter des hypothèses sur les objets considérés, ni à donner des énoncés moins forts, si l'exposé peut y gagner en simplicité. Des exposés beaucoup plus généraux peuvent être trouvés dans [Ill71, Ill72], [Lau79] ou [Wew]. Les techniques utilisées ici s'inspirent de celles utilisées dans [Vis] et [LS67].

Nous utiliserons constamment des schémas munis de l'action d'un groupe fini, il est donc naturel de poser les définitions suivantes.

Définition 1.1 Soient G un groupe fini et Y un schéma. Un $Y[G]$ -schéma (ou $A[G]$ -schéma si $Y = \operatorname{Spec} A$) est un couple $(X \rightarrow Y, i)$ où $X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas et $i : G \rightarrow \operatorname{Aut}_Y(X)$ est un homomorphisme de groupes abstraits. S'il n'y a pas de confusion possible, on notera aussi $(X \rightarrow Y, G)$, voire (X, G) , le couple $(X \rightarrow Y, G)$.

Les $Y[G]$ -schémas forment une catégorie, les flèches étant les morphismes G -équivariants de Y -schémas.

Si P est une propriété des morphismes de schémas, nous dirons qu'un morphisme de $Y[G]$ -schémas $(X_1, i_1) \rightarrow (X_2, i_2)$ possède la propriété P si le morphisme sous-jacent $X_1 \rightarrow X_2$ possède la propriété P .

Soient k un corps, G un groupe fini et (X_0, i_0) un $k[G]$ -schéma. Une déformation équivariante de (X_0, i_0) consiste en la donnée

- d'un anneau local artinien A d'idéal maximal \mathfrak{m}_A de corps résiduel k ;

- d'un $A[G]$ -schémas (X, i) plat sur A ;
- et d'un isomorphisme $(X \times_{\mathrm{Spec} A} \mathrm{Spec} k, i) \rightarrow (X_0, i_0)$

Une telle donnée sera appelée *déformation équivariante* de (X_0, i_0) au-dessus de A .

Deux déformations équivariantes (X_1, i_1) et (X_2, i_2) de (X_0, i_0) au-dessus d'un anneau A seront dites isomorphes s'il existe un $A[G]$ -morphisme $f : (X_1, i_1) \rightarrow (X_2, i_2)$ induisant l'identité sur les fibres fermées (qui sont canoniquement isomorphe à (X_0, i_0)). On peut remarquer qu'alors f est un isomorphisme grâce à [Sch68], Lemma 3.3.

Nous noterons \mathfrak{A} la catégorie des anneaux locaux artiniens de corps résiduel k .

Définition 1.2 (relèvement équivariant) Soient A' un objet de \mathfrak{A} , $\mathfrak{m}_{A'}$ son idéal maximal, $\mathfrak{a} \subset A'$ un idéal tel que $\mathfrak{m}_{A'}\mathfrak{a} = 0$ (en particulier, \mathfrak{a} est naturellement une k -algèbre) ; notons $A = A'/\mathfrak{a}$ et \mathfrak{m}_A son idéal maximal. Soit (X, i) une déformation équivariante au-dessus de A d'un $k[G]$ -schémas (X_0, i_0) . Un relèvement équivariant de (X, i) à A' est une déformation équivariante (X', i') de (X_0, i_0) au-dessus de A' telle qu'il existe un isomorphisme $(X' \times_{\mathrm{Spec} A'} \mathrm{Spec} A, i') \rightarrow (X, i)$.

L'exemple le plus simple de donnée satisfaisant les hypothèses de la définition précédente est donné par $A' = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ (l'algèbre des nombres duaux qu'on note souvent $k[\varepsilon]$), $\mathfrak{m}_{A'} = \mathfrak{a} = (\varepsilon)$ et $A = k$. Les relèvements équivariants de (X_0, i_0) à $k[\varepsilon]$ seront appelés les *déformations équivariantes du premiers ordres*.

Le but de cet article est de démontrer une version affaiblie du théorème suivant.

Théorème 1.3 Soient k un corps, G un groupe fini et X_0 un k -schéma réduit, noethérien, localement d'intersection complète et muni d'une action de G (i.e. il existe un homomorphisme $i_0 : G \rightarrow \mathrm{Aut}_k(X_0)$ faisant de (X_0, i_0) un $k[G]$ -schéma). Notons $\Omega_{X_0/k}$ le complété séparé du faisceau des différentielles relatives si X_0 est le spectre d'un anneau local complet, et notons $\Omega_{X_0/k}$ le faisceau des différentielles relatives sinon. Reprenons les notations introduites dans la définition 1.2. Soit (X, i) une déformation équivariante de (X_0, i_0) au-dessus de A .

1. Si (X', i') est un relèvement équivariant de (X, i) à A' alors le groupe des automorphismes de relèvements de (X', i') (i.e. les automorphismes équivariants de (X', i') qui fixent (X, i)) est canoniquement isomorphe à

$$\mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0})^G.$$

2. Il existe un élément canonique

$$\omega_{A', \mathfrak{a}} \in \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}_{G, \mathcal{O}_{X_0}}^2(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0})$$

appelé obstruction, tel que $\omega_{A', \mathfrak{a}} = 0$ si et seulement s'il existe un relèvement de (X, i) à A' .

3. S'il existe un relèvement de (X, i) à A' , alors l'ensemble des classes d'isomorphismes de relèvements de (X, i) à A' est canoniquement isomorphe à

$$\mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}_{G, \mathcal{O}_{X_0}}^1(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}).$$

La définition de morphisme localement d'intersection complète adoptée ici (cf. définition 2.4), est un peu plus générale que celle utilisée habituellement (cf. par exemple [Liu02]) afin d'englober le cas des anneaux locaux.

Voici le plan de cette note. Dans la section 2, nous rassemblons les définitions et propriétés concernant les intersections locales complètes munies d'une action d'un groupe fini. Dans la section 3, nous montrons le résultat pour les intersections locales complètes affines (cf. Théorème 3.4 et Théorème 3.7) et nous démontrons une version plus faible du cas général dans la section 4 (cf. Théorème 4.3 et Théorème 4.4). La section 6 regroupe divers exemples et corollaires.

L'outil de base est la cohomologie équivariante. Notre référence dans ce domaine est [Gro57] que nous utiliserons librement.

Le groupe nul sera noté 0.

2 Morphismes localement d'intersection complètes

Définition 2.1 Soient A un anneau et G un groupe fini. Nous dirons qu'un $A[G]$ -schéma est G -FL s'il est d'une des formes suivantes

- $(\mathbb{A}_{A,G}^n, G)$ où $\mathbb{A}_{A,G}^n := \text{Spec} A[\{x_{i,\sigma}\}_{1 \leq i \leq n, \sigma \in G}]$ et l'action (à gauche) de G est définie par $\sigma'(X_{i,\sigma}) = X_{i,\sigma\sigma'}$;
- un schéma affine $(\text{Spec} B, G)$, où B est une localisation de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{A,G}^n}$ stable sous l'action de G ;
- $(\text{Spec} A[[\{x_{i,\sigma}\}_{1 \leq i \leq n, \sigma \in G}]], G)$ et l'action est définie par $\sigma'(X_{i,\sigma}) = X_{i,\sigma\sigma'}$.

La proposition suivante justifie la dénomination G -FL (pour G -formellement lisse).

Proposition 2.2 Soient A un anneau, G un groupe fini et (Y, G) un $A[G]$ -schéma G -FL. Soit (X_0, G) et (X, G) des $A[G]$ -schémas affines et supposons qu'il existe un diagramme commutatif de $A[G]$ -schémas

$$\begin{array}{ccc} (X_0, G) & \xrightarrow{f} & (Y, G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, G) & \longrightarrow & \text{Spec} A \end{array}$$

où le morphisme $X_0 \rightarrow X$ est une immersion fermée définie par un idéal de carré nul. Alors il existe un morphisme de $A[G]$ -schémas $\tilde{f} : (X, G) \rightarrow (Y, G)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (X_0, G) & \xrightarrow{f} & (Y, G) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ (X, G) & & \end{array}$$

Preuve : Immédiate. □

Il eut peut être été plus naturel de définir un morphisme G -FL comme étant un morphisme vérifiant la propriété énoncée dans la proposition 2.2. Toutefois, l'étude de ces morphismes et de leurs propriétés nous aurait emmenés au-delà des buts de cet article.

Soit $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ un morphisme de schéma. Si X est le spectre du complété d'un anneau de type fini en un point, nous noterons $\Omega_{X/A}$ le séparé complété du module des différentielles. Sinon nous noterons $\Omega_{X/A}$ son faisceau des différentielles relatives.

En particulier, pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} de type fini, on a une bijection entre l'ensemble des A -dérivations de \mathcal{O}_X à valeurs dans \mathcal{F} et l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/A}, \mathcal{F})$.

Proposition 2.3 *Soient G un groupe fini, A un anneau et (Y, G) un $A[G]$ -schéma G -FL. Alors le faisceau $\Omega_{Y/A}$ est un $\mathcal{O}_{Y,G}$ -module projectif.*

Preuve : Ceci découle de la description de $\Omega_{Y/A}$. □

Définition 2.4 Soient G un groupe fini, A un anneau et (X, G) un $A[G]$ -schéma. Nous dirons que (X, G) est G -IC s'il existe un $A[G]$ -schéma (Y, G) qui soit G -FL, et une immersion régulière $(X, G) \rightarrow (Y, G)$. Un morphisme (non équivariant) sera dit d'intersection complète s'il est 0-IC.

Remarque 2.5 Cette définition de morphisme d'intersection complète n'est pas classique. Elle englobe évidemment la notion de morphisme d'intersection complète si celui-ci est en plus de type fini. La définition adoptée ici est nécessaire car, très souvent, nous "localiserons" les obstructions et devrons donc travailler sur des anneaux locaux (voire complet) qui ne sont pas de type fini sur la base.

En particulier, on voit que si un $A[G]$ -schéma (X, G) est G -IC et de présentation finie, alors le schéma sous-jacent X est une intersection complète. Cette propriété est en fait une équivalence d'après le lemme suivant.

Lemme 2.6 *Soient A un anneau, G un groupe fini et (X, G) un $A[G]$ -schéma affine. Si X est d'intersection complète, alors (X, G) est G -IC.*

Preuve : Supposons que $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ est de type fini, la démonstration dans le cas général se faisant de la même manière. Notons B l'anneau des fonctions de X . Comme $X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ est de type fini, il existe un morphisme surjectif

$$\varphi : C := A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$$

tel que le morphisme induit $X \rightarrow \operatorname{Spec} C$ soit une immersion régulière (cf. [Liu02], Corollary 6.3.22). Définissons un morphisme équivariant

$$\varphi' : C' := A[\{X_{i,\sigma}\}_{1 \leq i \leq n, \sigma \in G}] \rightarrow B$$

par $\varphi'(X_{i,\sigma}) = \sigma(\varphi(X_i))$. Comme $\operatorname{Spec} C' \rightarrow \operatorname{Spec} A$ est lisse, le morphisme $\varphi' : X \rightarrow \operatorname{Spec} C'$ est une immersion régulière (cf. [Liu02], corollary 6.3.22), ce qui achève la preuve. □

Lemme 2.7 Soient k un corps, (X_0, G) un $k[G]$ -schéma réduit qui soit G -IC et $j : (X_0, G) \rightarrow (Y_0, G)$ une immersion régulière dans un $k[G]$ -schéma qui soit G -FL. Notons \mathcal{I}_0 l'idéal de l'immersion j . Alors on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2 \rightarrow \Omega_{Y_0/k}|_{X_0} \rightarrow \Omega_{X_0/k} \rightarrow 0.$$

Preuve : Supposons dans un premier temps que X_0 et Y_0 sont de type fini sur k . Alors tout est classique, sauf peut être l'injectivité. Celle-ci est prouvée dans [Vis], Lemma 4.7 (c'est ici que le fait que X soit réduit intervient).

La démonstration dans le cas général est similaire. \square

En appliquant le foncteur $\mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(-, \mathcal{O}_{X_0})^G$ à la suite exacte du lemme précédent on obtient une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}) &\rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{Y_0/k}|_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow \\ \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0}) &\rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X_0}, G}^1(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow \\ \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X_0}, G}^1(\Omega_{Y_0/k}|_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0}) &\rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X_0}, G}^1(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow \\ \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X_0}, G}^2(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}) &\rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X_0}, G}^2(\Omega_{Y_0/k}|_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0}) \end{aligned}$$

Comme le faisceau $\Omega_{Y_0/k}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{Y_0}[G]$ -module projectif (cf. Proposition 2.3), le faisceau $\Omega_{Y_0/k}|_{X_0}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{X_0}[G]$ -module projectif. Ainsi, on a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}) &\rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{Y_0/k}|_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow \\ \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0}) &\rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X_0}, G}^1(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

et un isomorphisme

$$\mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X_0}, G}^1(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X_0}, G}^2(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}) \quad (2.2)$$

3 Déformation équivariante des schémas affines

Fixons quelques notations. Dans cette section et dans la suite k sera un corps, G un groupe fini, (X_0, G) un $k[G]$ -schéma qui est G -IC, $(X_0, G) \rightarrow (Y_0, G)$ une immersion régulière dans un $k[G]$ -schéma qui est G -FL. On choisit un objet A' de \mathfrak{A} , $\mathfrak{m}_{A'}$ son idéal maximal, $\mathfrak{a} \subset A'$ un idéal tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{m}_{A'} = 0$. Notons $A = A'/\mathfrak{a}$ et \mathfrak{m}_A son idéal maximal. Finalement, fixons une déformation équivariante (X, G) de (X_0, G) au-dessus de A , un $k[G]$ -schéma (Y, G) au-dessus de A ayant pour fibre spécial (Y_0, G) (on montre aisément qu'il en existe étant donné la définition des schémas G -FL) et une immersion régulière $\pi : (X, G) \rightarrow (Y, G)$ relevant l'immersion $(X_0, G) \rightarrow (Y_0, G)$ (il existe de tels relèvement grâce à la proposition 2.2). Nous noterons \mathcal{I}_0 l'idéal de l'immersion $X_0 \rightarrow Y_0$ et \mathcal{I} l'idéal de l'immersion $X \rightarrow Y$. Fixons également un relèvement G -FL (Y', G) de (Y, G) à A' .

3.1 Classification des relèvements

Soient (X'_1, G) et (X'_2, G) des relèvements de (X, G) à A' . La proposition 2.2 nous fournit des relèvements $\pi_i : (X'_i, G) \rightarrow (Y', G)$ du morphisme $\pi : (X, G) \rightarrow (Y, G)$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}_{Y'} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{O}_{X'_1} & & \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & \mathcal{O}_{Y'}/\mathfrak{a} = \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_X \\
 & \nearrow & & \nearrow & \\
 \mathcal{O}_{Y'} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{O}_{X'_2} & &
 \end{array}$$

Notons $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}$ les idéaux de définitions des immersions régulières π_1, π_2 et π . Comme les X'_i sont plats sur A' , on a $\mathcal{I}_i \otimes_{A'} A = \mathcal{I}$.

Soient $f \in \mathcal{I}$ et $f_i \in \mathcal{I}_i$ des relèvements de f . Comme (X'_1, G) et (X'_2, G) sont des relèvements de (X, G) à A' et que $\mathcal{O}_{Y'}$ est plat sur A' (ce qui implique que le noyau de $\mathcal{O}_{Y'} \rightarrow \mathcal{O}_Y$ est $\mathfrak{a} \otimes_{A'} \mathcal{O}_{Y'}$) on a $f_1 - f_2 \in \mathfrak{a} \otimes_{A'} \mathcal{O}_{Y'}$. Or, comme $\mathfrak{m}_{A'} \mathfrak{a} = 0$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathfrak{a} \otimes_{A'} \mathcal{O}_{Y'} \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{O}_{Y_0}.$$

Ainsi, on peut voir $f_1 - f_2$ comme un élément de $\mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{O}_{Y_0}$ qui est nul si et seulement si $f_1 = f_2$ dans $\mathcal{O}_{Y'}$. Notons $\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G))(f)$ l'image de $f_1 - f_2$ dans

$$\mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{O}_{Y_0} / \mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{I}_0 = \mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0}.$$

On voit alors aisément que cet élément ne dépend que de f, π_1 et π_2 mais en aucun cas des relèvements f_i de f .

D'autre part, comme π_1 et π_2 sont équivariants, pour tout $\sigma \in G$ les éléments $\sigma(f_i) \in \mathcal{I}_i$ sont des relèvements de $\sigma(f)$. On a donc un morphisme G -équivariant de \mathcal{O}_Y -modules

$$\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G)) : \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0}.$$

Finalement, l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}, \mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0})^G \cong \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0 / \mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})^G$$

(provenant encore une fois de l'égalité $\mathfrak{m}_{A'} \mathfrak{a} = 0$) nous permet de considérer $\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G))$ comme un élément de

$$\mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0 / \mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})^G.$$

Proposition 3.1 *Soient (X'_i, G) ($1 \leq i \leq 3$) des relèvements de (X, G) à A' . Alors l'application $\nu_{Y'}$ vérifie les propriétés suivantes (les égalités de schémas doivent être comprises comme des égalités en tant que sous-schémas fermés de Y')*

- (i) $\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G)) = 0$ si et seulement si $(X'_1, G) = (X'_2, G)$;

- (ii) $\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G)) + \nu_{Y'}((X'_2, G), (X'_3, G)) = \nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_3, G))$;
- (iii) $\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G)) = -\nu_{Y'}((X'_2, G), (X'_1, G))$;
- (iv) soit $\nu \in \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})^G$, alors il existe un relèvement (\tilde{X}'_1, G) de (X, G) à A' tel que $\nu_{Y'}((X'_1, G), (\tilde{X}'_1, G)) = \nu$;
- (v) soient $(\tilde{Y}', G) \rightarrow (Y', G)$ un morphisme de $A'[G]$ -schémas tel que (\tilde{Y}', G) soit G -FL, et $\tilde{\pi}_0 : (X_0, G) \rightarrow (\tilde{Y}' \times_{\mathrm{Spec} A'} \mathrm{Spec} k, G)$ une immersion régulière qui se factorise à travers $(X_0, G) \rightarrow (Y_0, G)$; notons $\tilde{\mathcal{I}}_0$ l'idéal de l'immersion $\tilde{\pi}_0$. Alors l'image de $\nu_{\tilde{Y}'}((X'_1, G), (X'_2, G))$ par l'application canonique

$$\mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\tilde{\mathcal{I}}_0/\tilde{\mathcal{I}}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})^G \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})^G$$

est $\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G))$.

Preuve : Seule la partie (iv) nécessite une démonstration, les autres propriétés étant des conséquences immédiates de la définition de ν .

Notons \mathcal{I}_1 l'idéal de l'immersion $X'_1 \rightarrow Y'$, \mathcal{I} l'idéal de l'immersion $X \rightarrow Y$ et

$$\tilde{\mathcal{I}}_1 := \left\{ \begin{array}{l} \tilde{f} \in \mathcal{O}_{Y'} \mid \text{l'image } \bar{f} \text{ de } \tilde{f} \text{ dans } \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y'} \otimes_{A'} A'/\mathfrak{a} \text{ est dans } \mathcal{I} \text{ et} \\ \exists f \in \mathcal{I}_1 \text{ tel que l'image de } f - \tilde{f} \text{ dans } \mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0} \text{ est } \nu(\bar{f}) \end{array} \right\}$$

On vérifie sans peine que $\tilde{\mathcal{I}}_1$ est un idéal de $\mathcal{O}_{Y'}$ stable sous l'action de G et que le schéma $(\tilde{X}'_1, G) = (\mathrm{Spec} \mathcal{O}_{Y'}/\tilde{\mathcal{I}}_1, G)$ est un relèvement de (X, G) tel que $\nu_{Y'}((X'_1, G), (\tilde{X}'_1, G)) = \nu$. \square

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus.

Corollaire 3.2 *Soit (X, G) une déformation équivariante de (X_0, G) . Supposons qu'il existe un relèvement (X', G) de (X, G) à A' . Alors l'ensemble*

$$\{\text{Relèvement de } (X, G) \text{ à } A' \text{ plongés dans } Y'\}$$

est canoniquement un espace principal homogène sous l'action de

$$\mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})^G.$$

Supposons qu'il existe un isomorphisme de relèvements $\varphi : (X'_1, G) \rightarrow (X'_2, G)$. On a alors un diagramme **non** commutatif *a priori*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y'} & \xrightarrow{\pi_1^\#} & \mathcal{O}_{X'_1} \\ & \searrow \pi_2^\# & \uparrow \varphi^\# \\ & & \mathcal{O}_{X'_2} \end{array}$$

Posons $D := \pi_1^\# - \varphi^\# \circ \pi_2^\#$. La composé de D avec la projection $\mathcal{O}_{X'_1} \rightarrow \mathcal{O}_{X'_1} \otimes_{A'} A'/\mathfrak{a}$ est nulle (car φ induit l'identité sur X). Ainsi D est à valeurs dans $\mathfrak{a} \otimes_{A'} \mathcal{O}_{X'_1}$ car X'_1 est plat sur A' . L'isomorphisme canonique

$$\mathfrak{a} \otimes_{A'} \mathcal{O}_{X'_1} \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0}$$

(provenant de l'égalité $\mathbf{am}_{A'} = 0$) permet de considérer D comme étant à valeurs dans $\mathbf{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0}$.

Comme les structures de $\mathcal{O}_{Y'}$ -modules sur $\mathbf{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0}$ induites par $\pi_1^\#$ et $\varphi^\# \circ \pi_2^\#$ sont les mêmes et que pour tout $f, g \in \mathcal{O}_{Y'}$ on a

$$D(fg) = \pi_1^\#(f)D(g) + (\varphi^\# \circ \pi_2^\#(g))D(f),$$

on peut considérer D comme une A' -dérivation de $\mathcal{O}_{Y'}$ à valeurs dans $\mathbf{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0}$. Par suite, D induit un morphisme

$$\mu_{Y'}(\varphi) : \Omega_{Y'/A'} \rightarrow \mathbf{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0}.$$

D'autre part, comme π_1, π_2 et φ sont équivariants, $\mu_{Y'}(\varphi)$ est en fait un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'}}(\Omega_{Y'/A'}, \mathbf{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0})^G$. Finalement, l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'}}(\Omega_{Y'/A'}, \mathbf{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0})^G \cong \mathbf{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{Y'/A'}|_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0})^G$$

permet de voir $\mu_{Y'}(\varphi)$ comme un élément de $\mathbf{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{Y'/A'}|_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0})^G$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la construction de $\mu_{Y'}$.

Proposition 3.3 *Soient $\varphi_1 : (X'_1, G) \rightarrow (X'_2, G)$ et $\varphi_2 : (X'_2, G) \rightarrow (X'_3, G)$ des isomorphismes de relèvements. L'application $\mu_{Y'}$ vérifie les propriétés suivantes*

- (i) $\mu_{Y'}(\varphi_1) = 0$ si et seulement si $\varphi_1 = \mathrm{Id}$.
- (ii) $\mu_{Y'}(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \mu_{Y'}(\varphi_2) + \mu_{Y'}(\varphi_1)$.
- (iii) Si $(\tilde{Y}', G) \rightarrow (Y', G)$ est un morphisme entre schémas G -FL et $(X_0, G) \rightarrow (\tilde{Y}_0, G) := (\tilde{Y}' \times_{\mathrm{Spec} A'} \mathrm{Spec} k, G)$ est une immersion régulière factorisant le morphisme $(X_0, G) \rightarrow (Y_0, G)$. Alors l'image de $\mu_{\tilde{Y}'}(\varphi_1)$ par l'application

$$\mathbf{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{\tilde{Y}'}|_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0})^G \rightarrow \mathbf{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{Y_0}|_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0})^G$$

est $\mu_{Y'}(\varphi_1)$.

- (iv) $\mu_{Y'}$ induit une bijection entre les isomorphismes de relèvements $(X'_1, G) \rightarrow (X'_2, G)$ et les préimages de $\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G))$ par l'application

$$\mathbf{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{Y_0/k}|_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0})^G \rightarrow \mathbf{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})^G.$$

Preuve : Le seul énoncé qui n'est pas une conséquence directe de la définition est le dernier point. Décrivons tout d'abord le morphisme

$$\mathbf{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{Y_0/k}|_{X_0}, \mathcal{O}_{X_0})^G \rightarrow \mathbf{a} \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})^G.$$

En reprenant les notations précédemment introduites, on voit que D , en restriction à \mathcal{I} , induit $\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G))$ via le morphisme ci-dessus. Il suffit donc de voir qu'un préimage de $\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G))$ induit un isomorphisme $\varphi : X'_1 \rightarrow X'_2$. Fixons donc un tel préimage D . En utilisant les constructions inverses de celles faites précédemment, on peut considérer D comme un morphisme

$$\mathcal{O}_{Y'} \rightarrow \mathbf{a} \otimes_{A'} \mathcal{O}_{X'_1} \rightarrow \mathcal{O}_{X'_1}.$$

On définit alors un isomorphisme de la manière suivante. Définissons un morphisme $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}_{Y'} \rightarrow \mathcal{O}_{X'_1}$ par $\tilde{\varphi}(f) = \pi_1^\#(f) + D(f)$. C'est bien un morphisme d'anneau car $\mathfrak{a}^2 = 0$. Comme D est envoyée sur $\nu_{Y'}((X'_1, G), (X'_2, G))$, on voit que $\ker \pi_2^\# \subset \ker \tilde{\varphi}$ et donc $\tilde{\varphi}$ induit un morphisme $(X'_1, G) \rightarrow (X'_2, G)$ qui est un isomorphisme par platitude. \square

Les propositions 3.1, 3.3 et la suite exacte (2.1) ont pour conséquence le théorème suivant.

Théorème 3.4 *Soient (X_0, G) un schéma affine dans la classe $G\text{-IC}$, $(X \rightarrow \text{Spec } A, G)$ une déformation équivariante de (X_0, G) et $(X' \rightarrow \text{Spec } A', G)$ un relèvement de (X, G) à A' . Alors*

- (i) *le groupe des automorphismes de relèvements de (X', G) est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{a} \otimes_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0})^G$.*
- (ii) *l'ensemble des classes d'isomorphie de relèvements de (X, G) à A' est un espace principal homogène sous $\text{Ext}_G^1(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0})$.*

3.2 Existence de relèvement

Fixons un relèvement (*a priori* non équivariant) X' de X (il en existe toujours, cf. par exemple [Vis], Lemma 2.7) et un plongement $X' \rightarrow Y'$ (ce qui est possible car Y' est formellement lisse). Notons \mathcal{I}' l'idéal de cet immersion. Soient $\sigma \in G$ et $f \in \mathcal{I}$. Choisissons un relèvement f' de f dans \mathcal{I}' . Ainsi, $\sigma(f') - f'$ est un élément de $\mathcal{O}_{Y'}$ (ce n'est pas toujours un élément de \mathcal{I}' car X' n'est pas forcément muni d'une action de G). Notons $\omega_{X'}(\sigma)(f)$ l'image de $\sigma(f') - f'$ dans $\mathcal{O}_{X'}$. Comme X est muni d'une action de G (i.e. \mathcal{I} est fixe sous l'action de G), $\omega_{X'}(\sigma)(f)$ est nul modulo \mathfrak{a} . On a donc naturellement $\omega_{X'}(\sigma)(f) \in \mathfrak{a} \otimes_{A'} \mathcal{O}_{X'}$ (car X' est plat sur A'). On montre alors aisément que $\omega_{X'}(\sigma)(f)$ ne dépend pas du relèvement f' de f .

On a donc construit une application $\mathcal{O}_{Y'}$ -linéaire

$$\mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_{A'} \mathcal{O}_{X'}$$

Les isomorphismes $\mathfrak{a} \otimes_{A'} \mathcal{O}_X \cong \mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0}$ et

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}, \mathfrak{a} \otimes_k \mathcal{O}_{X_0}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a} \otimes_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})$$

nous permettent de considérer $\omega_{X'}(\sigma)$ comme un élément de

$$\mathfrak{a} \otimes_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0}).$$

D'autre part, de la définition de $\omega_{X'}(\sigma)$ découle directement l'égalité

$$\omega_{X'}(\sigma\sigma') = \sigma(\omega_{X'}(\sigma')) + \omega_{X'}(\sigma)$$

et donc $\omega_{X'}$ définit un élément de

$$H^1(G, \mathfrak{a} \otimes_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})) = \mathfrak{a} \otimes_k H^1(G, \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})).$$

Pour tout élément $\phi \in \mathfrak{a} \otimes_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})$ nous noterons $\partial\phi$ le morphisme de cobord défini par $\partial\phi = \sigma\phi - \phi$.

Lemme 3.5 *L'image de $\omega_{X'}$ dans $\mathfrak{a} \otimes_k H^1(G, \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0}))$ est indépendante de X' . On la notera ω_{emb}*

Preuve : Choisissons deux relèvements X'_1 et X'_2 de X . Le résultat est une conséquence de l'égalité

$$\omega_{X'_1}(\sigma)(f) - \omega_{X'_2}(\sigma)(f) = (\partial\nu_{Y'}((X'_1, 0), (X'_2, 0))) (f).$$

□

Proposition 3.6 *Il existe un relèvement équivariant de (X, G) à A' si et seulement si $\omega_{emb} = 0$.*

Preuve : Le sens direct est immédiat car si on a un relèvement équivariant (X', G) de (X, G) à A' , alors $\omega_{X'} = 0$.

Montrons la réciproque et supposons pour cela que $\omega_{emb} = 0$. Choisissons un relèvement quelconque X' de X . Par définition, il existe

$$\phi \in \mathfrak{a} \otimes_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathcal{O}_{X_0})$$

tel que $\omega_{X'} = \partial\phi$. Choisissons un relèvement (*a priori* non équivariant) X'' de X tel que $\nu_{Y'}((X', 0), (X'', 0)) = \phi$. Il est alors aisé de voir que $\omega_{X''} = 0$ et, par suite, qu'on peut munir X'' d'une action de G relevant celle de X . □

On obtient alors directement le théorème suivant.

Théorème 3.7 *Il existe un élément canonique*

$$\omega_{(X, G), A'} \in \mathfrak{a} \otimes_k \text{Ext}_G^2(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0})$$

qui s'annule si et seulement si (X, G) admet un relèvement équivariant à A' .

Preuve : C'est une conséquence immédiate de l'isomorphisme (2.2) et du fait qu'il existe un relèvement équivariant de (X, G) à A' si et seulement s'il existe un relèvement équivariant plongé dans (Y', G) . □

4 Déformation équivariante des schémas localement d'intersections complètes

Définition 4.1 Soient A un anneau, G un groupe fini et (X, G) un $A[G]$ -schéma. Alors (X, G) sera dit localement G -IC s'il existe un recouvrement $\{U_i\}$ de X par des ouvers affines stables sous l'action de G tels que (U_i, G) soit un $A[G]$ -schéma G -IC.

En particulier, si (X, G) est un $A[G]$ -schéma localement G -IC alors le quotient X/G existe. Contrairement au cas des schémas G -IC, il peut exister des $A[G]$ -schémas localement d'intersections complètes qui ne sont pas localement G -IC.

4.1 Classification des relèvements et de leurs automorphismes

Nous avons tout d'abord besoin de rappeler quelques résultats sur les extensions équivariantes.

Soient G un groupe fini, A un anneau, (X, G) un $A[G]$ -schéma noethérien, \mathcal{F} et \mathcal{G} deux $\mathcal{O}_X[G]$ -faisceaux quasi-cohérents sur X . Notons $\mathfrak{Ext}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'extensions équivariantes de \mathcal{F} par \mathcal{G} , i.e. des suites exactes de $\mathcal{O}_X[G]$ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Il est alors aisé de voir (cf. par exemple [HS71], Theorem II.2.4 pour le cas non équivariant) qu'on a une identification canonique

$$\mathrm{Ext}_G^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathfrak{Ext}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un recouvrement de X par des ouverts stables sous l'action de G . On définit $\mathfrak{Ext}_G(\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ comme l'ensemble des familles

$$(\{(\mathcal{E}_\alpha, i_\alpha, j_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}, \{\varphi_{\alpha', \alpha}\}_{\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}})$$

avec $(\mathcal{E}_\alpha, i_\alpha, j_\alpha) \in \mathfrak{Ext}_G(\mathcal{F}|_{U_\alpha}, \mathcal{G}|_{U_\alpha})$ et

$$\varphi_{\alpha', \alpha} : (\mathcal{E}_\alpha, i_\alpha, j_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_{\alpha'}} \rightarrow (\mathcal{E}_{\alpha'}, i_{\alpha'}, j_{\alpha'})|_{U_\alpha \cap U_{\alpha'}}$$

des isomorphismes d'extensions équivariantes vérifiant la condition de cochaîne $\varphi_{\alpha'', \alpha'} \circ \varphi_{\alpha', \alpha} = \varphi_{\alpha'', \alpha}$ pour tous $\alpha, \alpha', \alpha'' \in \mathcal{A}$.

Lemme 4.2 *Soit \mathcal{U} un recouvrement de X par des ouverts affines stables sous G . On a une bijection canonique*

$$\mathfrak{Ext}_G(\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\theta} \mathfrak{Ext}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Preuve : Soit $(\{(\mathcal{E}_\alpha, i_\alpha, j_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}, \{\varphi_{\alpha', \alpha}\}_{\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}}) \in \mathfrak{Ext}_G(\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$. Alors, par recollement, il existe une unique extension équivariante (\mathcal{E}, i, j) et des isomorphismes $\psi_\alpha : (\mathcal{E}, i, j)|_{U_\alpha} \rightarrow (\mathcal{E}_\alpha, i_\alpha, j_\alpha)$ tels que $\psi_{\alpha'} = \varphi_{\alpha', \alpha} \circ \psi_\alpha$. Posons $\theta((\{(\mathcal{E}_\alpha, i_\alpha, j_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}, \{\varphi_{\alpha', \alpha}\}_{\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}})) = (\mathcal{E}, i, j)$.

Nous allons construire une application réciproque. Soit $(\mathcal{E}, i, j) \in \mathfrak{Ext}_G(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

Comme les ouverts U_α sont affines et que \mathcal{F} est quasi-cohérent on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}|_{U_\alpha} \xrightarrow{i|_{U_\alpha}} \mathcal{E}|_{U_\alpha} \xrightarrow{j|_{U_\alpha}} \mathcal{G}|_{U_\alpha} \rightarrow 0.$$

Ainsi, $(\mathcal{E}_\alpha, i_\alpha, j_\alpha) := (\mathcal{E}|_{U_\alpha}, i|_{U_\alpha}, j|_{U_\alpha}) \in \mathrm{Ext}_G^1(\mathcal{F}|_{U_\alpha}, \mathcal{G}|_{U_\alpha})$. De plus, comme (\mathcal{E}, i, j) est un faisceau en extension, il existe des isomorphismes

$$\varphi_{\alpha', \alpha} : (\mathcal{E}, i, j)|_{U_\alpha \cap U_{\alpha'}} \rightarrow (\mathcal{E}, i, j)|_{U_\alpha \cap U_{\alpha'}}.$$

On a donc construit un élément $\theta'(\mathcal{E}) \in \mathfrak{Ext}_G(\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ dont l'image par θ est \mathcal{E} . Il est alors aisé de voir que θ' et θ sont inverses l'une de l'autre. \square

Théorème 4.3 *Soient k un corps, (X_0, G) un $\text{Spec}k[G]$ -schéma qui est localement dans la classe G -IC. Soit $A' \rightarrow A$ un morphisme surjectif d'objets de \mathfrak{A} et de noyau \mathfrak{a} tel que $\mathfrak{m}_{A'}\mathfrak{a} = 0$ (où $\mathfrak{m}_{A'}$ désigne l'idéal maximal de A'). Soit $(X \rightarrow \text{Spec}A, G)$ une déformation équivariante de (X_0, G) et $(X' \rightarrow \text{Spec}A', G)$ un relèvement de (X, G) à $\text{Spec}A'$. Alors*

- (i) *le groupe des isomorphismes de relèvements de (X', G) est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{a} \otimes_k \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0})^G$.*
- (ii) *l'ensemble des classes d'isomorphie de relèvements de (X, G) à A' est un espace principal homogène sous $\text{Ext}_G^1(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0})$.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate du cas affine (théorème 3.4) et du lemme précédent. \square

4.2 L'obstruction

Dans le cas général, la construction de l'obstruction nécessite l'utilisation du complexe cotangent équivariant (cf. [Ill71, Ill72] ou [Wew]), le problème fondamental étant que le complexe cotangent habituel, en tant qu'objet de la catégorie dérivée des complexes de \mathcal{O}_X -module, n'est pas muni d'une action de G .

Nous proposons ici un énoncé plus faible mais qui nous semble plus explicite. Il repose fondamentalement sur la suite spectrale

$$I_2^{p,q} := H^p(X_0/G, \mathcal{E}xt_G^q(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0})) \Rightarrow \text{Ext}_G^{p+q}(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}).$$

Dans beaucoup de cas concrets, il est plus simple à manipuler que le théorème général.

Théorème 4.4 *Soient k un corps, G un groupe fini et (X_0, G) un $k[G]$ schéma séparé localement dans la classe G -IC. Soient A' un objet de \mathfrak{A} , $\mathfrak{m}_{A'}$ son idéal maximal, $\mathfrak{a} \subset A'$ un idéal tel que $\mathfrak{m}_{A'}\mathfrak{a} = 0$; notons $A = A'/\mathfrak{a}$ et \mathfrak{m}_A son idéal maximal. Soit (X, G) une déformation équivariante au-dessus de A de (X_0, G) .*

1. *Il existe un élément canonique*

$$\omega_1 \in \mathfrak{a} \otimes_k H^0(X_0/G, \mathcal{E}xt_G^2(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}))$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour qu'il existe, localement sur X_0 , des déformations équivariantes de (X_0, G) .

2. *Si $\omega_1 = 0$ alors il existe un élément canonique*

$$\omega_2 \in \mathfrak{a} \otimes_k H^1(X_0/G, \mathcal{E}xt_G^1(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}))$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un recouvrement U_i de X_0 et des relèvements équivariants (X'_i, G) de $(X \cap U_i, G)$ tels que $(X'_i, G)|_{U_i \cap U_j} \cong (X'_j, G)|_{U_i \cap U_j}$

3. *Si $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$ alors il existe un élément canonique*

$$\omega_3 \in \mathfrak{a} \otimes_k H^2(X_0/G, \mathcal{E}xt_G^0(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}))$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un relèvement équivariant de (X, G) à A' .

Preuve : Démontrons tout d'abord le point 1. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de X_0 par des ouverts affines stables sous l'action de G . D'après le théorème 3.7, il existe un élément canonique $\omega_i \in \mathfrak{a} \otimes_k H^0(U_i/G, \mathcal{E}xt_G^2(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}))$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un relèvement équivariant de $(X \cap U_i, G)$. Comme cet élément est défini de manière canonique, les différents ω_i se recolle pour donner un élément $\omega_1 \in \mathfrak{a} \otimes_k H^0(X_0/G, \mathcal{E}xt_G^2(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}))$.

Passons à la démonstration du point 2 et supposons que $\omega_1 = 0$. Fixons un recouvrement U_i de X_0 par des ouverts affines stables sous l'action de G et d'intersections complètes sur k . Comme $\omega_1 = 0$, $\omega_1|_{U_i} = 0$ et donc il existe des relèvements équivariants (X'_i, G) de $(X \cap U_i, G)$. Comme X_0 est séparé, $U_i \cap U_j$ est affine et d'intersection complète sur k . Notons $\nu_{i,j}$ l'image de $\nu_{Y'}((X'_i, G), (X'_j, G))$ dans $\mathfrak{a} \otimes_k \text{Ext}_G^1(\Omega_{U_i \cap U_j/k}, \mathcal{O}_{U_i \cap U_j})$ (pour un schéma (Y', G) G-FL sur A' tel qu'il existe une immersion régulière équivariante $(X \cap U_i \cap U_j, G) \rightarrow (Y', G) \times_{\text{Spec } A'} \text{Spec } A$; l'élément $\nu_{i,j}$ est indépendant du choix de Y' grâce à la proposition 3.1 (v)). La propriété (ii) de la proposition 3.1 permet de voir que les $\nu_{i,j}$ définissent un élément ω_2 de

$$\mathfrak{a} \otimes_k \check{H}^1(\{U_i\}, \mathcal{E}xt_G^1(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0}))$$

et on montre aisément que cet élément est indépendant des relèvements (X'_i, G) choisis.

D'autre part, comme les ouverts affines sont acycliques pour la cohomologie de Zarisky des faisceaux cohérents, on a

$$\mathfrak{a} \otimes_k \check{H}^1(\{U_i\}, \mathcal{E}xt_G^1(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0})) = \mathfrak{a} \otimes_k H^1(X_0, \mathcal{E}xt_G^1(\Omega_{X_0/k}, \mathcal{O}_{X_0})).$$

On a donc bien défini notre élément ω_1 comme dans l'énoncé. La démonstration du point 2 est alors aisée.

Nous allons maintenant démontrer le point 3. Supposons que $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$. Comme précédemment, fixons un recouvrement U_i de X_0 par des ouverts affines stables sous l'action de G et d'intersections complètes sur k . Comme $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$, il existe des relèvements (X'_i, G) de $(X \cap U_i, G)$ tel que $(X'_i \cap (U_i \cap U_j), G) \cong (X'_j \cap (U_i \cap U_j), G)$. Fixons des isomorphismes

$$\varphi_{i,j} : (X'_i \cap (U_i \cap U_j), G) \rightarrow (X'_j \cap (U_i \cap U_j), G).$$

Notons $\varphi_{i,j,\ell} = \varphi_{i,j} \circ \varphi_{\ell,j}^{-1} \circ \varphi_{\ell,i} \in \mathfrak{a} \otimes_k \text{Ext}_G^0(\Omega_{U_i \cap U_j \cap U_\ell/k}, \mathcal{O}_{U_i \cap U_j \cap U_\ell})$ (cf. Théorème 3.4). Les $\varphi_{i,j}$ définissent un élément

$$\omega_3 \in \mathfrak{a} \otimes_k \check{H}^2(\{U_i\}, \mathcal{E}xt_G^0(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_x)).$$

La proposition 3.3 (ii) permet de voir que cet élément est indépendant des isomorphismes $\varphi_{i,j}$ choisis. On montre alors aisément que $\omega_3 = 0$ si et seulement s'il existe des isomorphismes $\varphi_{i,j}$ tels que $\varphi_{i,\ell} = \varphi_{i,j} \circ \varphi_{j,\ell}$ pour tous i, j, ℓ . D'où le résultat par recollement des X'_i le long des $U_i \cap U_j$ grâce aux $\varphi_{i,j}$. \square

5 Corollaires et applications

Nous allons maintenant voir quelques exemples simples de calculs. La plupart du temps, nous assumerons une hypothèse de trivialité de la cohomologie des groupes. Plus précisément, nous nous placerons presque toujours sous l'une des hypothèses suivantes :

- le groupe agissant sur les schémas considérés a un ordre premier à toutes les caractéristiques intervenant dans le problème ;
- le groupe agit librement.

Le cas général (sauvage) est beaucoup plus complexe. Pour des exemples nous renvoyons à [BM00] et [CK] pour le cas des courbes lisses, ou bien [Mau03b, Mau03a] pour le cas des courbes stables.

5.1 Calcul de $\text{Ext}_G^1(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$

Proposition 5.1 *Soient k un corps, $X \rightarrow \text{Spec } k$ un schéma quasi-projectif et G un groupe d'ordre premier à la caractéristique de k et agissant sur $X \rightarrow \text{Spec } k$. Notons $\pi : X \rightarrow X/G =: \Sigma$ le morphisme quotient et supposons que $\Sigma \rightarrow \text{Spec } k$ est lisse. Alors on a une suite exacte*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{i-1}(\Sigma, \Omega_{\Sigma/k}^\vee) \rightarrow \text{Ext}_G^i(\Omega_{X/\Sigma}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Ext}_G^i(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \\ H^i(\Sigma, \Omega_{\Sigma/k}^\vee) \rightarrow \text{Ext}_G^{i+1}(\Omega_{X/\Sigma}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Preuve : Comme π est séparable on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_{\Sigma/k}^1 \rightarrow \Omega_{X/k} \rightarrow \Omega_{X/\Sigma} \rightarrow 0.$$

On a donc une suite exacte longue donnée par la cohomologie équivariante

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Ext}_G^{i-1}(\Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Ext}_G^i(\Omega_{X/\Sigma}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Ext}_G^i(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \\ \text{Ext}_G^i(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Ext}_G^{i+1}(\Omega_{X/\Sigma}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Il s'agit alors de calculer $\text{Ext}_G^i(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_X)$. Or on a une suite spectrale $I_2^{p,q} := H^p(\Sigma, \mathcal{E}xt_G^q(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_C))$ qui converge vers $\text{Ext}_G^{p+q}(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_X)$. D'autre part, comme $|G|$ est inversible dans k , on montre aisément, en utilisant une suite spectrale, que $\mathcal{E}xt_G^q(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_C) = \pi_*^G \mathcal{E}xt^q(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_C)$. Comme $\Sigma \rightarrow \text{Spec } k$ est lisse, $\Omega_{\Sigma/k}$ est localement libre donc $\mathcal{E}xt^q(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_C) = 0$ si $q > 0$. On a donc $\text{Ext}_G^i(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_X) = H^i(\Sigma, \pi_*^G \mathcal{E}xt^0(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_X))$. Or par adjonction, on a un isomorphisme canonique $\pi_* \mathcal{E}xt^0(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt^0(\Omega_{\Sigma/k}, \pi_* \mathcal{O}_X)$. Il en résulte que

$$\pi_*^G \mathcal{E}xt^0(\pi^* \Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt^0(\Omega_{\Sigma/k}, \mathcal{O}_\Sigma).$$

D'où le résultat. \square

Proposition 5.2 *Soient $C \rightarrow \text{Spec } k$ une courbe lisse sur un corps algébriquement clos et G un groupe d'ordre premier à la caractéristique de k et agissant*

fidèlement sur $C \rightarrow \text{Speck}$. Notons n le nombre de points de ramification dans le morphisme quotient. Alors on a

$$\dim_k \text{Ext}_G^1(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) - \dim_k \text{Ext}_G^0(\Omega_{C/k}, \mathcal{O}_C) = \chi(\Omega_{\Sigma/k}^\vee) + n.$$

Preuve : D'après la proposition ci-dessus, il suffit de montrer que

$$\sum_i (-1)^i \dim_k \text{Ext}_G^i(\Omega_{C/\Sigma}, \mathcal{O}_\Sigma) = n.$$

Comme l'ordre de G est inversible dans k , on a

$$\mathcal{E}xt_G^q(\Omega_{C/\Sigma}, \mathcal{O}_\Sigma) = \pi_*^G \mathcal{E}xt^q(\Omega_{C/\Sigma}, \mathcal{O}_C)$$

pour tout $q \geq 0$. Soient $\mathfrak{p} \in C$ un point ramifié, $D_{\mathfrak{p}}$ son stabilisateur et $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}$ la différentielle en ce point. Notons $R = \mathcal{O}_{C,\mathfrak{p}}$ et t une uniformisante de R . On a alors $\Omega_{C/\Sigma,\mathfrak{p}} \cong (R/(t^{\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}})) dt$. On prouve alors aisément (par exemple en prenant une résolution projective) que $\text{Ext}^i(\Omega_{C/\Sigma,\mathfrak{p}}, R) = 0$ si $i \neq 1$ et $\text{Ext}^1(\Omega_{C/\Sigma,\mathfrak{p}}, R) \cong (R/(t^{\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}})) \frac{\partial}{\partial t}$. Il s'agit alors de calculer $\dim_k (R/(t^{\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}})) \frac{\partial}{\partial t}^{D_{\mathfrak{p}}}$ dont on voit (par exemple en complétant R et en linéarisant l'action) qu'il est égal à $\left\lfloor \frac{\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}}{|D_{\mathfrak{p}}|} \right\rfloor$. Or $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}} = |D_{\mathfrak{p}}| - 1$ car l'ordre de $D_{\mathfrak{p}}$ est premier à la caractéristique de k . La suite spectrale $\mathbb{I}_2^{p,q} := H^p(\Sigma, \mathcal{E}xt_G^q(\Omega_{C/\Sigma}, \mathcal{O}_\Sigma))$ qui converge vers $\text{Ext}_G^{p+q}(\Omega_{C/\Sigma}, \mathcal{O}_\Sigma)$ permet aisément de conclure. \square

5.2 Calcul de $\text{Ext}_G^2(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$

Proposition 5.3 *Soient $X \rightarrow \text{Speck}$ un morphisme localement d'intersection complète et G un groupe fini d'ordre premier à la caractéristique de k et agissant sur X . Alors $\text{Ext}_G^2(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) = \text{Ext}^2(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)^G$.*

Preuve : On a une suite spectrale $H^p(G, \text{Ext}^q(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X))$ qui converge vers $\text{Ext}_G^{p+q}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$. Comme l'ordre de G est inversible dans k , on a

$$H^p(G, \text{Ext}^q(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)) = 0$$

si $p \geq 1$. D'où le résultat. \square

Proposition 5.4 *Soient $X \rightarrow \text{Speck}$ un schéma affine lisse et G un groupe agissant librement sur $X \rightarrow \text{Speck}$. Alors $\text{Ext}_G^\ell(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $\ell \geq 1$.*

Preuve : On a une suite spectrale $H^p(X/G, \mathcal{E}xt_G^q(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X))$ qui converge vers $\text{Ext}_G^{p+q}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$. Par suite, comme X/G est affine et que $\mathcal{E}xt_G^q(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$ est quasi-cohérent on a $\text{Ext}_G^\ell(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) = H^0(X/G, \mathcal{E}xt_G^\ell(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X))$. D'autre part, si on note $\pi : X \rightarrow X/G$ le morphisme quotient, on a une suite spectrale $R^p \pi_*^G \mathcal{E}xt^q(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$ qui converge vers $\mathcal{E}xt_G^{p+q}(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X)$. Comme $X \rightarrow \text{Speck}$ est lisse, on a $\mathcal{E}xt^q(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $q \geq 1$. D'autre part, comme G agit librement, le foncteur π_*^G est exact. On a donc $\mathcal{E}xt_G^\ell(\Omega_{X/k}, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $\ell \geq 1$. \square

Corollaire 5.5 *Soient $X \rightarrow \mathrm{Spec} k$ un schéma affine lisse et G un groupe fini agissant librement sur $X \rightarrow \mathrm{Spec} k$. Pour tout anneau local artinien A de corps résiduel k il existe une unique déformation équivariante de (X, G) au-dessus de A (à isomorphisme près).*

Preuve : Il suffit de combiner le théorème 1.3 (où le théorème 3.7) et la proposition 5.4. \square

Références

- [BM00] J. Bertin and A. Mézard, *Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques*, Invent. Math. **141** :1 (2000), 195–238.
- [CK] G. Cornelissen and F. Kato, *Equivariant deformation of Mumford curves and of ordinary curves in positive characteristic*, arXiv :math.AG/0103207, à paraître dans Duke Math. Journal.
- [Gro57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d’algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. (2) **9** (1957), 119–221.
- [HS71] P. J. Hilton and U. Stammbach, *A course in homological algebra*, Springer-Verlag, New York, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 4.
- [Ill71] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239.
- [Ill72] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations. II*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 283.
- [Lau79] O. A. Laudal, *Formal moduli of algebraic structures*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 754, Springer, Berlin, 1979.
- [Liu02] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press, 2002, Oxford Graduate Texts in Mathematics, No. 6.
- [LS67] S. Lichtenbaum and M. Schlessinger, *The cotangent complex of a morphism*, Trans. Amer. Math. Soc. **128** (1967), 41–70.
- [Mau03a] S. Maugeais, *Déformations équivariantes des courbes stables I : Étude cohomologique*, 2003, preprint.
- [Mau03b] S. Maugeais, *Relèvement des revêtements p -cycliques des courbes rationnelles semi-stables*, Math. Ann. **327** :2 (2003), 365–393.
- [Sch68] M. Schlessinger, *Functors of Artin rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 208–222.
- [Vis] A. Vistoli, *The deformation theory of local complete intersections*, arXiv :alg-geom/9703008, preprint.
- [Wew] S. Wewers, *Formal deformation of curves with group scheme action*, arXiv :math.AG/0212145, preprint.